Μάθημα 20ο

Κλασική Μηχανική

30/05/2019

Λογισμός Μεταβολών

$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(\alpha,x), y'(\alpha,x), x)\,dx$, πότε μπορούμε να το ελαχιστοποιήσουμε: $\rightarrow \frac{\partial J(\alpha)}{\partial(\alpha)}\Big|_{\alpha=0} = 0$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} h(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right)dx = 0$$

$\forall h(x)$: $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$ εξίσωση Euler

Αρχή του Hamilton ή αρχή της στάσιμης δράσης

Έχω Υ.Σ. που κινείται από την θέση $A(t_A) \longrightarrow B(t_B)$

Τότε η ποσότητα $S = \int_{t_A}^{t_B} L\,dt$ είναι στάσιμη

ορίζουμε ως $L = E_K - E_\Delta$: λαγκραντζιανή συνάρτηση (Lagrange)

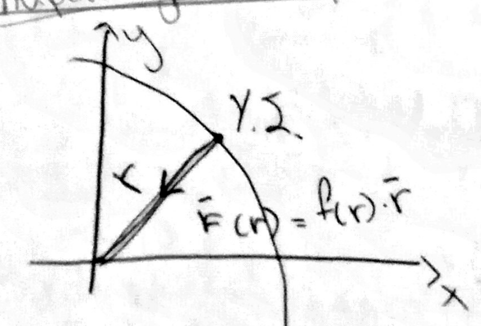
$L = E_K - E_\Delta = T - V$

(Προσοχή! αυτό ισχύει μόνο για διατηρητικές δυνάμεις)

Για να ελαχιστοποιήσω την δράση $S = \int_{t_A}^{t_B} L\,dt$, $L = L(x, \dot{x}, t)$

και $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$, εξίσωση του Euler-Lagrange

Παράδειγμα (Κεντρικές Δυνάμεις)



Κεντρικές:
έχουν φορέα το r (συνήθως προς το κέντρο της κίνησης η φορά τους)
και δεν εξαρτώνται από τη γωνία.

2ος Νόμος Νεύτωνα: $m \cdot a_r = -f(r)$: r-άξονας

$\Rightarrow \boxed{m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -f(r)}$

θ: άξονας: $m \cdot a_\theta = 0 \Rightarrow \boxed{m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0}$

Συνάρτηση Lagrange:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m u^2 - (-V(r)) = \frac{1}{2} m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + V(r)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m(-r\dot\theta^2) + \frac{dV(r)}{dr} - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m2\dot r\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m r\dot\theta^2 + \frac{dV}{dr} - m\ddot r \Rightarrow m(r\dot\theta^2 - \ddot r) = -\frac{dV}{dr} = f(r) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m(\ddot r - r\dot\theta^2) = f(r) \Rightarrow \boxed{m(\ddot r - r\dot\theta^2) = -f(r)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 0 \Rightarrow 0 - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m r^2 2\dot\theta\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) = 0 \Rightarrow m(2r\dot r\dot\theta + r^2\ddot\theta) = 0 \Rightarrow$$

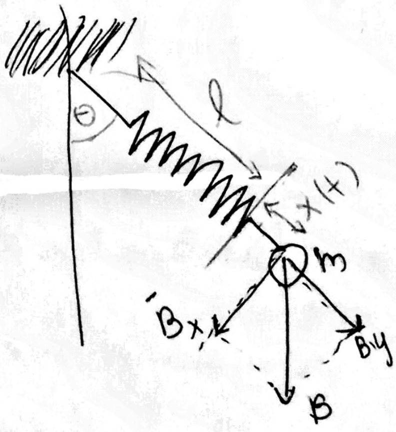
$$\Rightarrow m r(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{m(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta) = 0}$$

2ος Νόμος Νεύτωνα

$$\begin{cases} m a_r = -f(r) & \Rightarrow \boxed{m(\ddot r - r\dot\theta^2) = -f(r)} \\ m \cdot a_\theta = 0 & \Rightarrow \boxed{m(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta) = 0} \end{cases}$$

Παράδειγμα.

Το ελατήριο - εκκρεμές



μήκος του ελατηρίου - εκρ.: $l + x(t)$

Κινητική Ενέργεια.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot x)^2 + \frac{1}{2}m w^2$$

$$w = (l+x)\frac{d\theta}{dt} = (l+x)\dot\theta$$

$F = -kx$

$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}kx^2$

Δυναμική Ενέργεια: $V = \frac{1}{2}kx^2 - mg(l+x)\cos\theta$

Άρα: Lagrange: $L = T - V = \frac{1}{2}m\left[(\dot x)^2 + (\sin x)^2\dot\theta^2\right] + mg(l+x)\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2$

Εξισώσεις Euler

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 2(l+x) + mg\cos\theta - \frac{1}{2}kx - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m 2\dot{x}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m(l+x)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kx = m\ddot{x}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \Rightarrow -mg\sin\theta(l+x) - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cancel{2}} m (l+x)^2 \cancel{2}\dot{\theta}\right) = 0$$

$$\Rightarrow mg(l+x)\sin\theta + m\frac{d}{dt}\left[(l+x)^2\dot{\theta}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m(l+x)^2\ddot{\theta} + m\frac{d}{dt}(l+x)^2\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0}$$

ΣΔΕ $2^{ης}$ τάξης ως προς θ)

$$\Rightarrow \boxed{m(l+x)\ddot{\theta} + 2m\dot{x}\dot{\theta} + mg\sin\theta = 0}$$

Σύνδεση με τον Νόμο Νεύτωνα

Δυναμική Ενέργεια : $V = V(\vec{r}) = V(x,y,z)$

Κινητική Ενέργεια : $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

Τότε: $L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x,y,z)$

Εξισώσεις Euler

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= 0 \\ -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dt}(m\dot{y}) &= 0 \\ -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{d}{dt}(m\dot{z}) &= 0 \end{aligned}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = F_x \\[2ex] m\ddot{y} = -\dfrac{\partial V}{\partial y} = F_y \\[2ex] m\ddot{z} = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = F_z \end{cases} \iff \boxed{m\bar{a} = \bar{F}}$$

Δηλ. ο 2ος Ν.Ν.

Γενίκευση Ορμής και Ενέργειας

2ος Ν.Ν. $\bar{F} = m\bar{a}$

Εφαρμογή της αρχής του Hamilton γενικεύεται στις εξισώσεις του Euler: $\dfrac{\partial L}{\partial q} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$

q: χωρικές μεταβλητές

αν $\underset{= q_1}{x_1 = x}$, $\underset{= q_2}{x_2 = y}$, $\underset{= q_3}{x_3 = z}$

και $\dot{p}_1 = p_x = \underset{= m\dot{q}_1}{m\dot{x}}$, $\dot{p}_2 = p_y = \underset{= m\dot{q}_2}{m\dot{y}}$, $p_3 = p_z = \underset{= m\dot{q}_3}{m\dot{z}}$

Τότε:
$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{x}_i \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = F_i \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}(mx_i) = F_i, \quad i = 1,2,3. \\[2ex] \dfrac{d}{dt}(p_i) = F_i \end{array}$$

Άρα: p_i : γενικευμένη ορμή
F_i : γενικευμένη δύναμη

Συμπεράσματα

① Για οποιοδήποτε σύστημα ισχύει ο Ν.Ν.

② Με αυτόν τον τρόπο γενικεύσαμε τον 2ο Ν.Ν. (αρκετό ισχύ για κάθε σύστημα συντεταγμένων) και γενικεύονται τα φυσικά μεγέθη του που είναι η ορμή, p_i, και η δύναμη, F_i.

Γενίκευση της ενέργειας E

$$E = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L(q, \dot{q}, t) = H$$

ονομάζεται ολοκλήρωμα του Jacobi ή Χαμιλτωνιανή.

Παρατήρηση: Στα μηχανικά συστήματα (Μηχανική), η Λαγκρανζιανή L, είναι ανεξάρτητη του χρόνου, δηλ. $L = L(q, \dot{q})$

Απόδειξη

$$L = E_{KIN} - E_{ΔΥΝ} = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x,y,z) \Rightarrow$$

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - V(q_1, q_2, q_3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \Rightarrow \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial t} \overset{?}{=} 0$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \overset{?}{=} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - \dot{q}_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$$ ισχύει από εξίσωση Euler-Lagrange.

Πρώτα Ολοκληρώματα

ΥΣ κινείται στον x-άξονα, γράψε τις εξισώσεις κίνησης και βρες το ολοκλήρωμα της κίνησης.

Εξισώσεις κίνησης: $m\bar{a} = \bar{F} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\ddot{x} = F(x) \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow m\ddot{x} = F(x)$

$$\Rightarrow \int m \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) dt = \int F(x)\, dt \Rightarrow \boxed{m\dot{x} = \int F(x)\,dx + C}$$

$$E = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$$

Παράδειγμα:

Έστω Υ.Σ. που κινείται στον x-άξονα : $\bar{F} = (F(x), 0, 0)$

$$\left\{\begin{array}{l} m\ddot{x} = F(x) \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} = F(x)} ,$$

Αν η $\bar{F}$ είναι διατηρητική, αρκεί ν.δ.ο. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \bar{0} \iff$

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F(x) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \bar{0}$$

Τότε: $\exists\, V = V(x)$ τ.ω. $\bar{F} = -\bar{\nabla} V$

$$F(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

ολοκληρώνουμε

σλδ : $m\ddot{x} + \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0$

$$\Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = 0 \Rightarrow m\int \dot{x}\ddot{x}\,\partial t = m\frac{1}{2}(\dot{x})^2$$

$$\int \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}\,dt = \int \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\partial t = \int \frac{\partial V}{\partial x}\partial x = V(x)$$

Άρα: $\dfrac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x) = C = E$

Τότε: $\boxed{E = \dfrac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x)}$ αυτή είναι η χαμιλτωνιανή της κίνησης του Υ.Σ.

Παρατηρώ ότι είναι ανεξάρτητη του χρόνου.